Εισαγωγή στις Διαφορικές Εξισώσεις 16-12-19

(S)
$(py')' + (q + \lambda r)y = 0$ ομογ. εξίσωση $2^{ης}$ τάξης.

(C) $\alpha_1 y(a) + \alpha_2 y'(a) = 0$ || Συνοριακές - λύσεις
$\beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0.$

(λ_n): $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \to +\infty.$

λ: ιδιοτιμή X_λ: ιδιοσυνάρτηση

<u>ΟΡΙΣΜΟΣ:</u> Οι συναρτήσεις $f, g\ [\alpha, b] \to \mathbb{R}$ καλούνται ορθογώνιες ως προς τη συνάρτ. βάρους r αν
$$\int_a^b f(x) g(x) r(x)\, dx = 0$$

<u>ΘΕΩΡΗΜΑ 31</u>

(α) Αν y_0 είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0 τότε όλες οι ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ_0 είναι ακριβώς οι Cy_0 $(C \neq 0)$.

<u>Απόδειξη:</u>
Αν y_0 ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_0, τότε η συνάρτηση Cy_0 είναι επίσης ιδιοτιμή της (S-C)

Ας είναι y_1 ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στη ιδιοτιμή λ_0 τότε
$$\left.\begin{aligned} \alpha_1 y_0(\alpha) + \alpha_2 y_0'(\alpha) &= 0 \\ \alpha_1 y_1(\alpha) + \alpha_2 y_1'(a) &= 0. \end{aligned}\right\}$$
$\Downarrow$
2x2 γραμμ. ομογ. σύστημα α_1, α_2 το οποίο έχει μη μηδενική λύση $|\alpha_1| + |\alpha_2| + \dots + |\alpha| > 0$

$W(y_0, y_1)(\alpha) = 0 \Rightarrow y_0, y_1$ γρ. εξαρτ. στο (α, β)

(B) Δύο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν σε διαφορ. ιδιοτιμές είναι ορθογώνιες (στο $[\alpha, b]$) ως προς τη συνάρτηση βάρους r

Απόδειξη:

Ας είναι y_k, y_m δυο ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_k, λ_m, $k \neq m$. Είναι

$$\begin{aligned} (p y_k')' + (q + \lambda_k r) y_k = 0 \quad &\Big| \cdot y_m \\ (p y_m')' + (q + \lambda_m r) y_m = 0 \quad &\Big| \cdot y_k \end{aligned} \quad \ominus$$

$$y_m (p \cdot y_k')' - y_k (p y_m') + (q + \lambda_k r) y_m y_k - (q + \lambda_m r) y_k y_m = 0.$$

$$q (y_k y_m - y_k y_m) + r(\lambda_k - \lambda_m) r y_k y_m = 0$$

$$\underbrace{\int_\alpha^b y_m (p y_k') dx - \int_\alpha^b y_k (p y_m')' dx}_{} = (\lambda_m - \lambda_k) \int_\alpha^b r y_k y_m dx$$

αρκεί να δ.ο. $= 0$.

Έχουμε $\int_\alpha^b y_m (p y_k') dx = p y_k' y_m \Big]_\alpha^b - \int_\alpha^b p \cdot y_k' y_m' dx$

$$= p(b) y_k'(b) y_m(b) - p(\alpha) y_k'(\alpha) y_m(\alpha) - \int_\alpha^b p y_m' y_k' dx.$$

$\cdot \int_\alpha^b y_k (p y_m') dx = p y_m' y_k \Big|_\alpha^b - \int_\alpha^b p y_k' y_m' dx =$

$$= p(b) y_m'(b) y_k(b) - p(\alpha) y_m'(\alpha) y_k(\alpha) - \int_\alpha^b p y_m' y_k' dx$$

$$= p(b)\left[y_i'(b)\overset{0}{y_m(b)} - y_m'(b)y_i(b)\right] - p(a)\left[y_i'(a)\overset{0}{y_m(a)} - y_m'(a)y_i(a)\right]$$

$$\left\{\begin{array}{l} \beta_1 y_i(b) + \beta_2 y_i'(b) = 0 \\ \beta_1 y_m(b) - \beta_2 y_m'(b) = 0 \end{array}\right\} \quad |\beta_1| + |\beta_2| > 0$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 6/136

$$x^2 y'' + xy' + \lambda y = 0 \quad y(1) = 0,\ y(\pi) = 0.$$

$$(xy')' + \frac{1}{x}\lambda y = 0. \Rightarrow (xy')' + \left(0 + \frac{1}{x}\lambda\right)y = 0.$$

$$r(x) = \frac{1}{x}, \quad x \in [1, \pi]$$

$$t = \log x, \quad y' = \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x} = \frac{1}{x} \Rightarrow xy' = \frac{\partial y}{\partial t}$$

$$y'' = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right) = -\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)\frac{\partial t}{\partial x}$$

$$= -\frac{1}{x^2}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{1}{x^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow x^2 y'' = -\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$-\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial x}{\partial t} + \lambda y = 0$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \lambda y = 0.$$

$$y(x) = \begin{cases} C_1 \cdot x^{\sqrt{-\lambda}} + C_2 \cdot x^{\sqrt{-\lambda}}, & \lambda < 0 \\ C_1 + C_2 \log x, & \lambda = 0. \\ C_1 \cos(\sqrt{\lambda}\log x) + C_2 \sin(\sqrt{\lambda}\log x), & \lambda > 0. \end{cases}$$

$\lambda > 0 \quad C_1 = 0, \quad C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0.$

$\sqrt{\lambda} = n\pi$

$\lambda = (n\pi)^2$

$\left\{ y_n(x) = \sin(n\pi \log x) \quad , x \in [1, \pi] \right.$

$\int_1^{\pi} \frac{1}{x} \sin(k\pi \log x) \sin(k\pi \log x)\, dx \quad , k \neq u$

$a_2(x) y'' + a_1(x) y'(x) + \alpha_0(x) y(x) = 0.$

$a_0, a_1, a_2 \in C(I) \quad , a_2(x) \neq 0 \quad , x \in I.$

- $\sum_{n=0}^{\infty} C_n (x - x_0)^n \quad , \quad r = \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|C_n|}} \qquad \lim \left| \frac{C_{n+1}}{C_n} \right| \in \mathbb{R}$

$e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n \quad , \frac{1}{1-x} = \sum_{i=1}^{\infty} x^n.$